別記様式第３号

学　位　論　文　要　旨

氏　名　　　有　元　康　一

題　目　格子の数学とその教育への応用
― 格子の基底と格子多角形の性質を中心として ―

学位論文要旨（和文2,000字又は英文1,000語程度）

本研究では，格子の基底および格子多角形の性質を中心として，格子の数学とその教育への応用について考察した．第I部で格子の基底の性質とその教育への応用，第II部で格子多角形の性質とその教育への応用について論じた．

第I部は第1章から第5章で構成され，格子の基底に関する簡約理論について考察している．情報セキュリティ分野における重要な研究対象の一つである格子の最短ベクトル問題への基本的なアプローチの一つとして，1982年にLenstraらによって開発されたLLL格子基底簡約アルゴリズムがある．基底簡約とは基底をうまく取りかえて，応用する際に都合の良い単純なものを構成することであり，このアルゴリズムは計算機代数の分野等に実際に応用されている．Lenstraらによる研究をはじめとする一連の研究では，実ベクトル空間$\mathbf{R}^n$における有理整数環$\mathbf{Z}$上の格子を考えていたが，本研究では，有理数体から有限次元拡大された代数体における整数環上の格子への一般化を試み，虚二次体であるガウスの数体に一般化した．また，虚二次体以外の代数体には一般化できないことを明らかにした．最後に，格子基底簡約理論の教育への応用について述べた．

第1章では，第2章から第4章で必要な格子の一般理論について説明する．ここでは，体K上のベクトル空間において，Kに含まれる環R上で格子を定義する．また，格子によって一意に決まる量である判別式とその性質について述べた．

第2章では，体K，環Rとしてそれぞれ実数体と有理整数環$\mathbf{Z}$をとったときの格子を考え，2つの代表的な簡約基底であるMinkowski簡約基底とLLL簡約基底を導入した．後半では，LLL格子基底簡約の理論について詳しく述べた．

第3章では，有限次代数体における整数環の最小元について論じた．虚二次体$\mathbf{Q}(\sqrt{m})$，$m<0$以外の代数体の場合，整数環に関して0が集積点となり，いくらでも0に近い元が存在することの証明を2通り与えた．

第4章では，虚二次体における整数環を考え，整数環上の格子におけるLLL基底簡約について述べ，その性質を明らかにした．その後，簡約基底の存在性について検討し，ガウスの数体上で常に簡約基底が存在するように，LLL簡約基底の条件を弱めた擬LLL簡約基底を定義してその性質を明らかにした．また，この基底を求めるアルゴリズムが有限回の計算で終了することを証明した．このことにより，簡約基底の存在が証明された．

第5章では，前章までで議論された格子基底簡約理論の教材化に向けた一つの試みとして，格子を用いた平面のしきつめ問題について論じた．この試みは，従来数学の分野のみで議論されていた簡約理論を，数学教育の分野に応用しようとするものである．

第II部は第6章から第10章で構成され，2次元の格子上に頂点をもつ格子多角形について考察した．整数座標をもつ点からなる正方格子において，一般の格子多角形や円周上の格子点の個数などについての研究は行われているが，辺の長さと面積が整数であるヘロン三角形に関する研究は見られない．ここでは正方格子において，ヘロン三角形の頂点となる格子点を構成する方法を与えた．また，和算家である菊池長良の公式で表現できないヘロン三角形の例を挙げた．さらに，格子多角形に関連するピックの定理，格子正多角形，円周上の有理点の個数，格子ヘロン三角形の教材化の可能性について論じた．

第6章では，ピックの定理とその教材化について論じた．また，格子点を頂点とする正多角形は正方形に限ることの証明を紹介した．この証明は背理法の教材化や知的好奇心を引き出す教材化の可能性を多分に含んでいることを示した．

第7章では，円周上にある有理点の個数についての古典的結果をまとめ，その教材化について述べた．この章で取り扱った内容は，中学校では連立方程式の学習，高等学校では円の方程式の学習の範囲でも可能であることを指摘し，数学的活動のための教材化が可能であることを示した．

第8章では，第10章の準備として，初等幾何学において有名なトレミーの定理の応用として，相互の距離がすべて有理数であるような無限個の点をもつ円が存在することの証明を示した．

第9章では，ヘロン三角形の三辺の長さを与える菊池長良やCarmichaelの公式について考察した．特に，菊池長良の公式では表現できないヘロン三角形が存在することを示した．和算の話題は中学校の教科書でも多数取り上げられており，生徒にとっても馴染みやすい話題である．和算の教材化については多くの研究があるが，ここではヘロン三角形に関する和算の研究成果を教材化する可能性を示した．

第10章では，円上の無限個の有理点で，相互の距離がすべて有理数となるような円が存在することを示した．この結果の応用を含め，ヘロン三角形の頂点となる格子点の求め方を2つ見出した．格子とヘロン三角形は，ともに生徒の興味を引くことのできる題材である．これらをつなげて，格子ヘロン三角形の概念を導入し，さらにそれに関連する問題群を提示することにより，代数学の教材化における新たな可能性を示した．

最後に，研究のまとめと今後の課題について述べた．特に，本論文で考察した数学の内容は，中学校・高等学校における数学科において，これからの時代に展開することが求められる「主体的・対話的で深い学び」を実現するための授業づくりの題材となりうることを指摘した．