別記様式第３号

学　位　論　文　要　旨

氏　名　小山 剛史

題　目　複素解析学の古典理論と複素関数の教材化の検討

学位論文要旨（和文2,000字又は英文1,000語程度）

本論文は，第 I 部と第 II で構成されており，第 I 部で複素解析学における古典的な結果に関する研究により得られた成果について，第 II 部で複素関数の高等学校数学科での教材化について論じる．

第 I 部では，複素解析学における古典理論における研究成果である Bloch 定数の評価に関する研究と，Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に関する研究について論じる．

（1）Bloch 定数の評価に関する研究

複素解析学において古くから知られている結果の 1 つに Bloch の定理というものがある．この定理は，単位円版上で定義された正則関数fについて，原点での微分係数の値が 1 であれば，それがどんな関数であっても，その関数の像領域はある一定の大きさの開円板Dを含んでおり，関数fは単位円版の一部を開円板Dに単射に移す，というものである．

この開円板Dの半径の上限は Bloch 定数と呼ばれており，定数の最良の値を求めることは古くから考えられてきた問題の 1 つで，未解決である．

Bloch 定数の知られている最良の評価は，Riemann 面の理論を用いた高度なものであるが，初等的な複素解析学を用いても Bloch 定数の下からの評価を与えることが可能であることが知られている．そこで，複素解析学の標準的なテキストとして知られている 3 つの文献(Conway, 小松，吉田)を参考に，3 つの文献にある Bloch 定数の評価よりも良い評価を得ることができるのではないかと考えた．その結果，これらの文献で具体的に定数をとっていた部分に任意の実数を与えることにより，初等的な方法による評価を改善することができた．

（2）Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に関する研究

複素解析学の分野の 1 つに，単位円板上で正則かつ単射である関数を扱う単葉関数論というものがある．Carathéodory の核収束定理とは，ある条件を満たす関数列と単位円板の像領域の列との間にある関係性について述べたものであり，単葉関数論における重要な結果の 1 つである．

私は岡山大学修士課程在籍時に，単葉関数論において大きな問題であった Bieberbach 予想の証明に興味を持ち，関連する研究に取り組んだ．Bieberbach 予想は 1980 年代に証明されたが，その証明において Carathéodory の核収束定理は重要な役割を果たしている．Bieberbach 予想の証明を再考する際に，Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明に関して幾つかの不明瞭

な部分を見つけた．そこで，単葉関数論の国際的に広く知られている専門書と Bieberbach 予想との関連について記述がある複数の文献を参考にしつつ，Carathéodory の核収束定理の定式化とその証明の改善に取り組んだ．

第 II 部では，複素解析学の古典理論の研究の基礎となる複素関数の見方や考え方を高等学校数学科で取り扱う方法とその可能性について論じる．平成 30 年告示の高等学校学習指導要領解説（文部科学省，2018）によると，高等学校数学科において複素数は，数学 II の「いろいろな式」，および，数学 C の「平面上の曲線と複素数平面」という単元で扱われている．それでは，これらの単元の中で複素関数の見方・考え方はどの程度扱われているのだろうか．また，高等学校数学科で扱う価値のある，そして扱うことが可能な複素関数の見方や考え方は何なのか．これらの問題を考察するために，高等学校数学の教科書分析を行い，複素関数論に関する内容とその教材化の検討について論じた．

教科書分析を行った結果，高等学校数学科の複素数平面の単元では，背景に複素関数の概念が関わる内容もあるものの，複素数平面上の点の移動としての扱いが重視されており，z-平面からw-平面への写像としての扱いはあまりされていない．本論文では，高校数学での複素関数の考え方を，複素関数を 2 次元から 2 次元への変換として動的に捉えることであると提案している．そして，この複素関数の考え方を高等学校数学科で取り扱うための価値ある教材として，高校数学の内容と関わりのある以下の 2 つを提案する．

(1) メビウス変換とジューコフスキー変換

メビウス変換とジューコフスキー変換は，複素関数論における重要な変換の 1 つである．メビウス変換については，円円対応という円または直線がメビウス変換によって円または直線に移るという性質に注目し，簡単な場合である$w = 1/z$での教材化の検討を行った．ジューコフスキー変換については，円や直線を楕円や双曲線に移すという性質に注目し，数学 C の「式と曲線」の単元と関連させた教材化の検討を行った．

(2) 代数学の基本定理の位相幾何学的な証明

高等学校数学科において，代数学の基本定理は事実のみ記載されており，その厳密な証明は高校で学ぶ内容の範囲外である．しかし，位相幾何学的な証明では，図を用いることで，高校生の知識だけを前提にしても，その定理が成立する原理までを直観的に説明することが可能であり，さらに複素関数の考え方である「複素関数を 2 次元から 2 次元への変換として動的に捉えること」を自然に扱うことが可能な教材であると考えた．そこで，本教材を用いた授業案の検討とその授業実践を行い，その成果と考察について論じた．